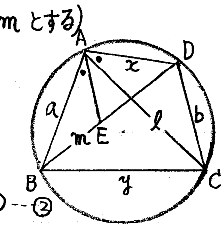
トレミーの定理

1238. 円に内接する四角形ABCDのとき $AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD$ が成立することをできるだけ多くの方法で示せ.（$AB=a$, $CD=b$, $AD=x$, $BC=y$, $AC=\ell$, $BD=m$ として, $ab+xy=\ell m$ を示せ.）

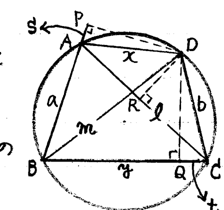
[考]さまざまなジャンルでの解が考えられます.基本事項の整理に useful [解1],[解2]は,中学生でもOK.
[考1]は定番,[考2]は,AB,BC,CAに垂線をおろし,3組の三角形の相似を考えます.

[解1] BD上に,$\angle CAD=\angle BAE$ となる点Eをとる.（$AB=a$, $CD=b$, $AD=x$, $BC=y$, $AC=\ell$ $BD=m$ とする）



$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$（∵円周角の定理より 弧$\overset{\frown}{AD}$の上にたつ円周角 $\angle ABE(\angle ABD)=\angle ACD$,
$\angle BAE=\angle CAD$ 2角相等）∴ $\dfrac{a}{\ell}=\dfrac{BE}{b}$ ∴ $ab=\ell\times BE$ ---①
$\triangle ABC \backsim \triangle AED$（∵円周角の定理より 弧$\overset{\frown}{AB}$の上にたつ円周角 $\angle BCA=\angle EDA(\angle BDA)$,
$\angle BAC=\angle BAE+\angle EAC=\angle CAD+\angle EAC=\angle EAD$ 2角相等）∴ $\dfrac{y}{ED}=\dfrac{\ell}{x}$ ∴ $xy=\ell\times ED$ ---②
①+② より $ab+xy=\ell\times(BE+ED)=\ell m$

[解2] 点Dから,AB,BC,CAにそれぞれ垂線DP,DQ,DRをおろす,BDが直径のとき,点P,Q,はそれぞれ,点A,Cに一致する,
BDが直径でない場合,点P,点Qのいずれか一方は,円内に,もう一方は円外に存在する.
右図は,点Pが円外に,点Qが円内に存在する場合の図であるが,これで,$ab+xy=\ell m$ を示すことにする.（点Pが円内に,点Qが円外に存在する場合も同様のこととなる.）



$AR=\ell'$, $CR=\ell-\ell'$

- AB,BCにおろした垂線DP,DQについて,$\triangle ADP \backsim \triangle CDQ$（∵四角形ABCDの外角と内角の関係より,$\angle PAD=\angle QCD$, $\angle APD=\angle CQD=90^\circ$, 2角相等）だから,$AP:CQ=AD:CD$
$AP:CQ=x:b$, $AP\times b=CQ\times x$, $AP=s$, $CQ=t$ とおく $\underline{sb=tx}$ ---①
- BC,CAにおろした垂線DQ,DRについて $\triangle DBQ \backsim \triangle DAR$（∵円周角の定理より $\angle DBQ=\angle DAR$, $\angle DQB=\angle DRA=90^\circ$, 2角相等）だから $DB:DA=BQ:AR$, $m:x=y-t:AR$, $AR=\ell'$ とおく $\underline{\ell' m=x(y-t)=xy-tx}$ ---②
- CA,ABにおろした垂線DR,DPについて $\triangle DCR \backsim \triangle DBP$（∵円周角の定理より $\angle DCR=\angle DBP$, $\angle DRC=\angle DPB=90^\circ$, 2角相等）だから $DC:DB=CR:BP$, $b:m=(\ell-\ell'):(a+s)$ $m(\ell-\ell')=b(a+s)$ $\underline{\ell m-\ell' m=ab+sb}$ ---③

②+③ より ℓ' を消去 $\ell m=ab+xy+sb-tx=ab+xy$（∵①より）
BDが直径の場合 $\angle BAD=90^\circ$, $\angle BCD=90^\circ$, だから,$AP=s=0$, $CQ=t=0$ であり,確かに成立する.

[考3] 3角です.（その1）余弦定理を用いて,四角形ABCDが円に内接する条件として,$\angle BAD+\angle BCD=\pi$ を用い,
$BD^2=m^2=a^2+x^2-2ax\cos\angle BAD=b^2+y^2-2by\cos(\pi-\angle BAD)$, $\cos\angle BAD$ を介して m^2 を a,b,x,y で表します.
ようするに,m と $\cos\angle BAD$ の連立方程式ということ.次に $AC^2=\ell^2=$---, $\ell^2=(a,b,x,y)$ の式とします.
ℓ^2m^2 を sense よく変形(factorization)する.数Iの計算です.（その2）正弦定理,四角形ABCDの外接円の半径Rは,$\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ の外接円の半径Rでもある.$\angle BAD=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle CAD=\gamma$, とおき,
円周角の定理で,角の移動,和⇄積の公式,それとも,中心角 $\angle AOB=2\alpha$, $\angle BOC=2\beta$, $\angle COD=2\gamma$ とおいて,
$(\angle DOA=2\pi-2\alpha-2\beta-2\gamma)$ $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\gamma$, ---, $\ell=2R\sin(\pi-\alpha-\beta)$, --- 和⇄積 まだありますね.
単位円を考えて,$C(1,0)$, $D(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $A(\cos\beta,\sin\beta)$, $B(\cos\gamma,\sin\gamma)$, $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$ とおく.
更に,図形と三角の混合,vector,vectorと三角の混合,ガウス平面,ガウス平面と三角の混合,など

[解3] (その1) 余弦定理より $l^2=a^2+y^2-2ay\cos\angle ABC=b^2+x^2-2bx\cos(\pi-\angle ABC)=b^2+x^2+2bx\cos\angle ABC$

(∵四角形ABCDは円に内接するから、$\angle ABC+\angle CDA=\pi$, ∴$\angle CDA=\pi-\angle ABC$)

$\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+y^2-l^2}{2ay}=\dfrac{l^2-b^2-x^2}{2bx}$, $bx(a^2+y^2-l^2)=ay(l^2-b^2-x^2)$, $(ay+bx)l^2=ay(b^2+x^2)+bx(a^2+y^2)$

$(ay+bx)l^2=ab^2y+ax^2y+a^2bx+bxy^2\overset{※}{=}(ab^2y+a^2bx)+(ax^2y+bxy^2)=ab(by+ax)+xy(ax+by)$

$(ay+bx)l^2=(ab+xy)(ax+by)$ ----① 同様に m にも余弦定理を用いると①の式で a,y,b,x のかわりに、それぞれ y,b,x,a を入れればよいから、($a\to y$, $y\to b$, $b\to x$, $x\to a$ におきかえるということ)

$(yb+xa)m^2=(yx+ab)(ya+xb)$ すなわち $(ax+by)m^2=(ab+xy)(ay+bx)$ ----②

①,②を辺々かけると $(ay+bx)(ax+by)l^2m^2=(ab+xy)^2(ax+by)(ay+bx)$ ∴$l^2m^2=(ab+xy)^2$

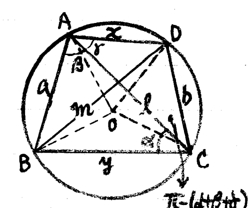
∴$lm=ax+by$

(補) ※のfactorizationは、xでまとめてたすきがけを利用すると $ayx^2+(a^2b+by^2)x+ab^2y$

$=(ax+by)(yx+ab)=(ax+by)(ab+xy)$ $\begin{matrix} a & by & by^2 \\ y & ab & a^2b \end{matrix}$ となります. m^2 は l と同様に計算してもOK.

(その2) 中心角 $\angle AOB=2\alpha$, $\angle BOC=2\beta$, $\angle COD=2\gamma$, $\angle DOA=2\pi-(2\alpha+2\beta+2\gamma)$ とおけば

それぞれの円周角 $\angle ACB=\alpha$, $\angle BAC=\beta$, $\angle CAD=\gamma$, $\angle ACD=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$



四角形ABCDの外接円の半径Rは、△ABC, △ACDの外接円の半径Rでもある.

正弦定理より. $a=2R\sin\alpha$, $y=2R\sin\beta$, $b=2R\sin\gamma$, $x=2R\sin(\alpha+\beta+\gamma)$,

$ab+xy=4R^2\sin\alpha\sin\gamma+4R^2\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$=4R^2\{-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\gamma)-\cos(\alpha-\gamma))-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+2\beta+\gamma)-\cos(-\alpha-\gamma))\}$ (∵積→和)

$=4R^2\{\frac{1}{2}\cos(\alpha-\gamma)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+2\beta+\gamma)\}$ (∵$\cos(-\alpha-\gamma)=\cos(\alpha+\gamma)$)

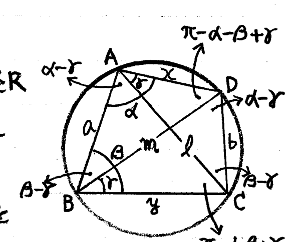
$=2R^2\{-2\sin\frac{2\alpha+2\beta}{2}\sin\frac{-2\beta-2\gamma}{2}\}=4R^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$ (∵$\sin(-\beta-\gamma)=-\sin(\beta+\gamma)$)

一方、△ABCについて、∠ABCの中心角 $\angle AOC=2\gamma+2\pi-(2\alpha+2\beta+2\gamma)=2\pi-(2\alpha+2\beta)$ より $\angle ABC=\pi-(\alpha+\beta)$

外接円の半径Rだから正弦定理より. $l=2R\sin(\pi-(\alpha+\beta))=2R\sin(\alpha+\beta)$

△ABDについて. $m=2R\sin(\beta+\gamma)$ ∴$lm=4R^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)=ab+xy$

(その2)' $\angle BAD=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle CAD=\gamma$ とおけば、円周角の定理と内接四角形の内対角の和はπを用いると右図のような角となる. 四角形ABCDの外接円の半径Rは、△ABC, △ABD, △ACDの外接円の半径Rでもある. △ABCに正弦定理を用いて



$a=2R\sin(\pi-\alpha-\beta+\gamma)=2R\sin(\alpha+\beta-\gamma)$, $y=2R\sin(\alpha-\gamma)$, $l=2R\sin\beta$

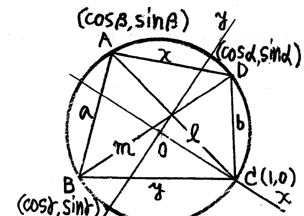
△ABDに正弦定理を用いて $x=2R\sin(\beta-\gamma)$, $m=2R\sin\alpha$, △ACDに正弦定理を用いて $b=2R\sin\gamma$. したがって $ab+xy=4R^2\{\sin(\alpha+\beta-\gamma)\sin\gamma+\sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\gamma)\}$

$=4R^2\{-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma))-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta-2\gamma)-\cos(\beta-\alpha))\}$

$=4R^2\{-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\beta-\alpha))\}=-2R^2\times(-2)\times\sin\beta\sin\alpha=4R^2\sin\beta\sin\alpha$

一方 $lm=4R^2\sin\beta\sin\alpha$ ∴$ab+xy=lm$

$\angle ACB=\angle BCD-(\beta-\gamma)$
$=\pi-\alpha-(\beta-\gamma)$
$=\pi-\alpha-\beta+\gamma$
$=\angle ADB$



(その2)'' 単位円周上の点 $C(1,0)$, $D(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $A(\cos\beta, \sin\beta)$, $B(\cos\gamma, \sin\gamma)$

$0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$ とおいても一般性は失われない。

$a^2=(\cos\beta-\cos\gamma)^2+(\sin\beta-\sin\gamma)^2=2-2\cos\beta\cos\gamma-2\sin\beta\sin\gamma$

$=2\{1-(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)\}=2(1-\cos(\beta-\gamma))=4\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}$ (∵半角の公式)

$2\pi>\gamma>\beta>0$ だから $a=2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}$, $b^2=(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha=4\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ∴ $b=2\sin\frac{\alpha}{2}$ (∵ $0<\alpha<2\pi$)

$x^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2=2-2(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)=2-2\cos(\beta-\alpha)=4\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}$

$2\pi>\beta>\alpha>0$ だから $x=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, $y^2=(\cos\gamma-1)^2+\sin^2\gamma=2-2\cos\gamma=4\sin^2\frac{\gamma}{2}$ $0<\gamma<2\pi$ だから $y=2\sin\frac{\gamma}{2}$

$l^2=(\cos\beta-1)^2+\sin^2\beta=2-2\cos\beta=4\sin^2\frac{\beta}{2}$, $0<\beta<2\pi$ だから $l=2\sin\frac{\beta}{2}$

$m^2=(\cos\gamma-\cos\alpha)^2+(\sin\gamma-\sin\alpha)^2=2-2(\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha)=2-2\cos(\gamma-\alpha)=4\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{2}$

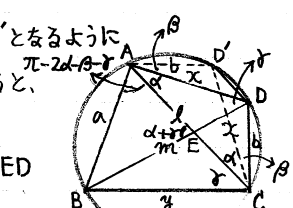
$0<\alpha<\gamma<2\pi$ だから $m=2\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$ (∵加法定理と $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$)

$ab+xy=4\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+4\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=-2\left(\cos\frac{\gamma-\beta+\alpha}{2}-\cos\frac{\gamma-\beta-\alpha}{2}\right)-2\left(\cos\frac{\beta-\alpha+\gamma}{2}-\cos\frac{\beta-\alpha-\gamma}{2}\right)$

$\cos\frac{\beta-\alpha-\gamma}{2}=\cos\left(-\frac{\gamma-\beta+\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\gamma-\beta+\alpha}{2}$ だから $ab+xy=2\left(\cos\frac{\gamma-\beta-\alpha}{2}-\cos\frac{\beta-\alpha+\gamma}{2}\right)=-4\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)$

$=4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$, $lm=4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$ ∴ $ab+xy=lm$ $\left(=4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)$

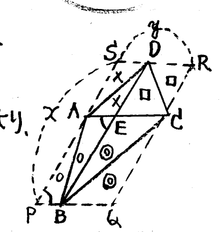
[考4] 図形と三角を用います。最小の弧を弧$\overset{\frown}{CD}$とします。弧$\overset{\frown}{CD}$の上にたつ円周角$\angle CAD=\angle ACD'$となるように弧$\overset{\frown}{AD}$上に点D'をとると$CD=AD'=b$、あるいは、$CD=AD'=b$となる点D'を弧$\overset{\frown}{AD}$の上にとると、$\angle CAD=\angle ACD'$、$\triangle ACD\equiv\triangle CAD'$となるから、四角形ABCD＝四角形ABCD'となります。



右下図、四角形ABCDの面積＝平行四辺形PQRSの面積$\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times AC\times BD\times\sin\angle AED$

四角形ABCDは、円に内接しているわけではありません。いつでも成立です。

すると、本題に戻って、四角形ABCD$=\frac{1}{2}lm\sin\angle AEB$，一方、四角形ABCD'＝------ です。



[解4] 最小の線分を$CD(=b)$とする。弧$\overset{\frown}{AD}$上に、$\angle CAD=\angle ACD'=\alpha$ となる点D'をとる。円周角の定理より、

弧$\overset{\frown}{CD}$＝弧$\overset{\frown}{AD'}$であり、$CD=AD'=b$。弧$\overset{\frown}{DD'}$の上にたつ円周角 $\angle DCD'=\angle DAD'=\beta$

$\triangle ACD$と$\triangle CAD'$において $CD=AD'=b$, $\angle ACD=\angle CAD'=\alpha+\beta$, AC共通、2辺挟角相当

∴$\triangle ACD\equiv\triangle CAD'$ ∴$\triangle ACD=\triangle CAD'$ よって 四角形ABCD＝四角形ABCD' ----①

$\angle ACB=\angle ADB=\gamma$ とおけば、$\angle AEB=\alpha+\gamma$, $\angle BAD+\angle BCD=\pi$ (内接四角形の内対角)

だから $(\angle BAC+\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)=\pi$, ∴$\angle BAC=\pi-2\alpha-\beta-\gamma$ 四角形ABCD$=\frac{1}{2}lm\sin(\alpha+\gamma)$ ---②

四角形ABCD'$=\triangle ABD'+\triangle BCD'=\frac{1}{2}ab\sin\{(\pi-2\alpha-\beta-\gamma)+\alpha+\beta\}+\frac{1}{2}xy\sin(\alpha+\gamma)$

$=\frac{1}{2}ab\sin(\pi-\alpha-\gamma)+\frac{1}{2}xy\sin(\alpha+\gamma)=\frac{1}{2}(ab+xy)\sin(\alpha+\gamma)$ (∵$\triangle ACD\equiv\triangle CAD'$より$AD=CD'=x$) ---③

①,②,③より $lm=ab+xy$

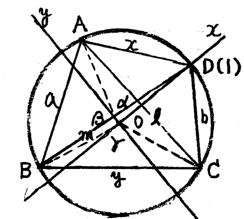
[考5] vectorと三角をmixすると、結局[解3]の(その2)''と同様のこととなります。vectorの解は[解10]としました。

[解5] (その2)''の図、$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ とする。$(AB\times CD)^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2|\vec{c}-\vec{d}|^2=(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b})(|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{d})$

$=\{1+1-2(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)\}\{1+1-2\cos\alpha\}=(2-2\cos(\beta-\gamma))(2-2\cos\alpha)=4(1-\cos(\beta-\gamma))(1-\cos\alpha)$

$=4\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$ $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$ より $0<\frac{\gamma-\beta}{2}<\pi$, $0<\frac{\alpha}{2}<\pi$ ∴$AB\times CD=2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ 以下同様。

[考6] 複素数平面(ガウス平面)による解です. D(1), A($\cos\alpha+i\sin\alpha$), B($\cos\beta+i\sin\beta$), C($\cos\gamma+i\sin\gamma$),
$0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$ とおくと、結局は、三角と同様のこととなります. 少し、ガウス平面らしい解にかえてみます.
複素数だけによる解(これは、重要)は[解7, 8, 9]です. 下[解6]のα,β,γは、上にかいたα,β,γとは異なります.



[解6] ガウス平面上での単位円に内接する四角形ABCDとする. 円の中心O(0), D(1),
A($z=\cos\alpha+i\sin\alpha$), B($\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$), C($\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$),
$0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$, $0<\gamma<2\pi$, $0<\alpha+\beta+\gamma<2\pi$, とする. $\angle DOA=\alpha$, $\angle AOB=\beta$, $\angle BOC=\gamma$
θだけ回転させる複素数を $w(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とする.

$(AB\times CD)^2=|z-zw(\beta)|^2|1-zw(\beta+\gamma)|^2=|z|^2|1-w(\beta)|^2|1-zw(\beta+\gamma)|^2$

$=1^2(1-w(\beta))(\overline{1-w(\beta)})(1-zw(\beta+\gamma))(\overline{1-zw(\beta+\gamma)})=(1-w(\beta))(1-\overline{w(\beta)})(1-zw(\beta+\gamma))(1-\overline{zw(\beta+\gamma)})$

$=\{1-(w(\beta)+\overline{w(\beta)})+w(\beta)\overline{w(\beta)}\}\{1-(zw(\beta+\gamma)+\overline{zw(\beta+\gamma)})+zw(\beta+\gamma)\overline{zw(\beta+\gamma)}\}$

ここで、$w(\beta)+\overline{w(\beta)}=(\cos\beta+i\sin\beta+\cos\beta-i\sin\beta)=2\cos\beta$, $w(\beta)\overline{w(\beta)}=|w(\beta)|^2=1^2=1$,

$\begin{cases} zw(\beta+\gamma)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos(\beta+\gamma)+i\sin(\beta+\gamma))=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma) \\ \overline{zw(\beta+\gamma)}=\cos(\alpha+\beta+\gamma)-i\sin(\alpha+\beta+\gamma) \end{cases}$

$zw(\beta+\gamma)+\overline{zw(\beta+\gamma)}=2\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, $zw(\beta+\gamma)\overline{zw(\beta+\gamma)}=|z|^2|w(\beta+\gamma)|^2=1^2\times1^2=1$

$\therefore (AB\times CD)^2=\{1-2\cos\beta+1\}\{1-2\cos(\alpha+\beta+\gamma)+1\}=4(1-\cos\beta)(1-\cos(\alpha+\beta+\gamma))$

$=4\times2\sin^2\frac{\beta}{2}\times2\sin^2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

$\therefore AB\times CD=ab=4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ ($\because 0<\frac{\beta}{2}<\pi,\ 0<\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}<\pi$)

$(AD\times BC)^2=|z-1|^2|zw(\beta)-zw(\beta+\gamma)|^2=(z-1)(\bar{z}-1)|z|^2(w(\beta)-w(\beta+\gamma))(\overline{w(\beta)}-\overline{w(\beta+\gamma)})$

$=(|z|^2-(z+\bar{z})+1)\times1^2\times\{|w(\beta)|^2-(w(\beta)\overline{w(\beta+\gamma)}+\overline{w(\beta)}w(\beta+\gamma))+|w(\beta+\gamma)|^2\}$

ここで $w(\beta)\overline{w(\beta+\gamma)}=(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos(-\beta-\gamma)+i\sin(-\beta-\gamma))=\cos\gamma+i\sin\gamma$

$\overline{w(\beta)}w(\beta+\gamma)=\cos\gamma-i\sin\gamma$ $\quad\therefore w(\beta)\overline{w(\beta+\gamma)}+\overline{w(\beta)}w(\beta+\gamma)=2\cos\gamma$

$\therefore (AD\times BC)^2=(2-2\cos\alpha)(2-2\cos\gamma)=4\times2\sin^2\frac{\alpha}{2}\times2\sin^2\frac{\gamma}{2}$

$\therefore AD\times BC=xy=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ ($\because 0<\frac{\alpha}{2}<\pi,\ 0<\frac{\gamma}{2}<\pi$)

$\underline{ab+xy}=4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=4\times(-\frac{1}{2})\{\cos\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{-\alpha-\gamma}{2}\}+4\times(-\frac{1}{2})\{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\}$

$=-2\cos\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}+2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}+2\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=-2(\cos\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\gamma}{2})$

$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$ --- ①

$(AC\times BD)^2=|z-zw(\beta+\gamma)|^2|zw(\beta)-1|^2=|z|^2(1-w(\beta+\gamma))(1-\overline{w(\beta+\gamma)})(zw(\beta)-1)(\overline{zw(\beta)}-1)$

$=1^2\times\{2-(w(\beta+\gamma)+\overline{w(\beta+\gamma)})\}\{2-(zw(\beta)+\overline{zw(\beta)})\}=\{2-2\cos(\beta+\gamma)\}\{2-2\cos(\alpha+\beta)\}$

$=4(1-\cos(\beta+\gamma))(1-\cos(\alpha+\beta))=16\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\therefore AC\times BD=lm=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$ --- ②

①, ② より $ab+xy=lm=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$ が成立する.

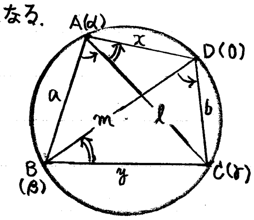
[補] 大変な計算でした. 基本事項の計算, 三角の和⇄積, ド・モアブルの定理など、練習には、いいですね.
[考6]にかいたように、始線ODから測った角をα,β,γとおけば、$AB^2=a^2=|(\cos\alpha+i\sin\alpha)-(\cos\beta+i\sin\beta)|^2$
$=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha+\beta)$ 以下[解3](その2)参照です.

[考7] 複素数による解です.重要です.角に関しては,複素数の利用が有効であることを覚えて下さい.

$\arg z=0$ のとき,z は正の実数となりますから,$z=|z|$ となります.$\arg z=\pi$ のとき z は負の実数となりますから,$z=-|z|$ となります.$A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(0)$ とおきます.円周角の定理より,$\angle ADB=\angle ACB$ は,左回りを正として $\arg(\beta-0)-\arg(\alpha-0)=\arg(\beta-\gamma)-\arg(\alpha-\gamma)$,$\arg\frac{\beta}{\alpha}=\arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$,$\arg\frac{\beta}{\alpha}-\arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=0$

$\arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\div\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)=0$,$\arg\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha(\beta-\gamma)}=0$,よって 複素数 $\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha(\beta-\gamma)}$ は正の実数.$\frac{-\beta(\gamma-\alpha)}{\alpha(\beta-\gamma)}=\left|\frac{-\beta(\gamma-\alpha)}{\alpha(\beta-\gamma)}\right|=\frac{|-\beta||\gamma-\alpha|}{|\alpha||\beta-\gamma|}$ $=\frac{|\beta||\gamma-\alpha|}{|\alpha||\beta-\gamma|}=\frac{ml}{xy}=\frac{lm}{xy}$ ($\alpha-\beta, \beta-\gamma, \gamma-\alpha$ に統一しました),$\angle ADB=\angle ACB$ を用いると x, y, l, m の関係式が得られました.$\angle CAD=\angle CBD$ を用いても,やはり,x, y, l, m の同じ関係式が得られます.結論は,$ab+xy=lm$ だからもう1つ,a, b, l, m の関係式が必要となります.$\angle BAC=\angle BDC$ or $\angle ABD=\angle ACD$ ということになります.$\angle BAD+\angle BCD=\pi$ or $\angle ABC+\angle ADC=\pi$ を用いると a, b, x, y の関係式が得られます.$|\alpha-\beta|=a$,$|\gamma|=b$,$|\alpha|=x$,$|\beta-\gamma|=y$,$|\gamma-\alpha|=l$,$|\beta|=m$ などと先にかいておけば,わかりやすいでしょう.

[解7] $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(0)$,とおく.$a=|\alpha-\beta|$.$b=|\gamma|$,$x=|\alpha|$,$y=|\beta-\gamma|$,$l=|\gamma-\alpha|$,$m=|\beta|$ となる.



円周角の定理より $\angle BDC=\angle BAC$ だから $\arg\frac{\gamma}{\beta}=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$,$\arg\frac{\gamma}{\beta}-\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0$

$\arg\frac{\gamma(\beta-\alpha)}{\beta(\gamma-\alpha)}=0$ よって 複素数 $\frac{\gamma(\beta-\alpha)}{\beta(\gamma-\alpha)}$ は正の実数 $\therefore\ \frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\gamma-\alpha)}=\left|\frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\gamma-\alpha)}\right|$

$=\frac{|-\gamma||\alpha-\beta|}{|\beta||\gamma-\alpha|}=\frac{|\gamma||\alpha-\beta|}{|\beta||\gamma-\alpha|}=\frac{ba}{ml}=\frac{ab}{lm}$ ---- ①

$\angle CAD=\angle CBD$ だから $\arg\frac{-\alpha}{\gamma-\alpha}=\arg\frac{-\beta}{\gamma-\beta}$,$\arg\frac{-\alpha}{\gamma-\alpha}-\arg\frac{-\beta}{\gamma-\beta}=0$

$\arg\frac{-\alpha(\gamma-\beta)}{-\beta(\gamma-\alpha)}=0$,$\arg\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{-\beta(\gamma-\alpha)}=0$ よって 複素数 $\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{-\beta(\gamma-\alpha)}$ は正の実数 $\therefore\ \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{-\beta(\gamma-\alpha)}=\left|\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{-\beta(\gamma-\alpha)}\right|=\frac{|\alpha||\beta-\gamma|}{|-\beta||\gamma-\alpha|}=\frac{xy}{lm}$ ②

① + ② より $\frac{ab}{lm}+\frac{xy}{lm}=\frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\gamma-\alpha)}+\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{-\beta(\gamma-\alpha)}=\frac{-\gamma\alpha+\beta\gamma-\alpha\beta+\gamma\alpha}{\beta(\gamma-\alpha)}=\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\beta(\gamma-\alpha)}=1$ lm を両辺にかけて $ab+xy=lm$

(補) ① は $\angle ABD=\angle ACD$,② は $\angle ADB=\angle ACB$ を用いても得られます.$\angle BAD+\angle BCD=\pi$ を用いると,

$\arg\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}+\arg\frac{\beta-\gamma}{-\gamma}=\pi$,$\arg\frac{-\alpha(\beta-\gamma)}{-\gamma(\beta-\alpha)}=\pi$,$\arg\frac{-\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma(\alpha-\beta)}=\pi$,よって,複素数 $\frac{-\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma(\alpha-\beta)}$ は負の実数

$\therefore\ \frac{-\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma(\alpha-\beta)}=-\left|\frac{-\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma(\alpha-\beta)}\right|=-\frac{|\alpha||\beta-\gamma|}{|\gamma||\alpha-\beta|}=-\frac{xy}{ab}$,$\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma(\alpha-\beta)}=\frac{xy}{ab}$ ---- ③ が得られ,① × ③ より ② が得られます.

[考8] [解7] と似たようなことですが,結論から,推して考えます.両辺を lm でわって $\frac{ab}{lm}+\frac{xy}{lm}=1$ を示します.

$\frac{ab}{lm}=\frac{|\alpha-\beta||\gamma|}{|\gamma-\alpha||\beta|}$ ですから,これにかかわる円周角 $\angle BAC=\angle BDC$ or $\angle ABD=\angle ACD$ ということになります.

[解8] 結論 $ab+xy=lm$ の両辺を lm でわって $\frac{ab}{lm}+\frac{xy}{lm}=1$ を示す.

円周角の定理より,$\angle ABD=\angle ACD$ だから,$\arg\frac{\alpha-\beta}{-\beta}=\arg\frac{\alpha-\gamma}{-\gamma}$,$\arg\frac{\alpha-\beta}{-\beta}-\arg\frac{\alpha-\gamma}{-\gamma}=0$,$\arg\frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{-\beta(\alpha-\gamma)}=0$,

よって 複素数 $\frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{-\beta(\alpha-\gamma)}$ は正の実数 $\therefore\ \frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\gamma-\alpha)}=\left|\frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\gamma-\alpha)}\right|=\frac{|-\gamma||\alpha-\beta|}{|\beta||\gamma-\alpha|}=\frac{ba}{ml}=\frac{ab}{lm}$ ---- ①

$\angle ADB=\angle ACB$ だから,$\arg\frac{\beta}{\alpha}=\arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$,$\arg\frac{\beta}{\alpha}-\arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=0$,$\arg\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha(\beta-\gamma)}=0$,複素数 $\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha(\beta-\gamma)}$ は正の実数

$\therefore\ \frac{-\beta(\gamma-\alpha)}{\alpha(\beta-\gamma)}=\left|\frac{-\beta(\gamma-\alpha)}{\alpha(\beta-\gamma)}\right|=\frac{|-\beta||\gamma-\alpha|}{|\alpha||\beta-\gamma|}=\frac{ml}{xy}=\frac{lm}{xy}$ $\therefore\ \frac{xy}{lm}=\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{-\beta(\gamma-\alpha)}$ ---- ②

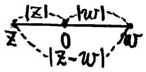
① + ② より $\frac{ab}{lm}+\frac{xy}{lm}=\frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\gamma-\alpha)}+\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{-\beta(\gamma-\alpha)}=\frac{-\gamma\alpha+\beta\gamma-\alpha\beta+\gamma\alpha}{\beta(\gamma-\alpha)}=\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\beta(\gamma-\alpha)}=1$,示された.

(補) [解7] とは異なる円周角を用いてみました.② では,$\frac{lm}{xy}$ が出てきましたので逆数をとりました.

先を見こして,$\arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}-\arg\frac{\beta}{\alpha}=0$ とするべきでした.

[考9] [解7]の図参照, $\angle ADC+\angle ABC=\pi$ とガウス平面における点の関係を用います. $\arg z-\arg w=\pi$ のとき
線分 zw 上に原点0がある.

[解9] 円に内接する四角形ABCDから, $\angle ADC+\angle ABC=\pi$, $\arg\frac{\gamma}{\alpha}+\arg\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\pi$, $\arg\frac{\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha(\gamma-\beta)}=\pi$
$\gamma(\alpha-\beta)=z$, $\alpha(\gamma-\beta)=w$ とおく. $\arg z-\arg w=\pi$ なので, 端点を除く線分 zw 上に原点0がある.



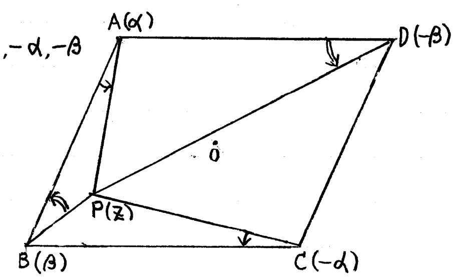
(0, α,β,γ は全て異なるので, $z\neq0$, $w\neq0$) よって $|z|+|w|=|z-w|$ ----①
$z-w=\gamma(\alpha-\beta)-\alpha(\gamma-\beta)=\cancel{\gamma\alpha}-\beta\gamma-\cancel{\gamma\alpha}+\alpha\beta=\beta(\alpha-\gamma)$
よって①より $|\gamma(\alpha-\beta)|+|\alpha(\gamma-\beta)|=|\beta(\alpha-\gamma)|$ ∴ $|\gamma||\alpha-\beta|+|\alpha||\gamma-\beta|=|\beta||\alpha-\gamma|$ ∴ $ab+xy=lm$

[補] [考10], [解10]が長くなりそうなので, ここで, 複素数が角に強いという[設問]を1つtryして下さい.

[設問] 平行四辺形ABCDの内部に $\angle PAB=\angle PCB$ となる点Pをとれば, $\angle PBC=\angle PDC$ であることを示せ.
但し, 平行四辺形ABCDは, $\angle ABC$ は鋭角とする.

(考) A(α), B(β), C($-\alpha$), D($-\beta$), 結論 $\angle PBC=\arg\frac{z-\beta}{-\alpha-\beta}$ となるので, $\angle PBA=\angle PDA$ とする方がわかりやすい?

(解) 平行四辺形ABCDだから, 点A, B, C, D を表す複素数をそれぞれ $\alpha,\beta,-\alpha,-\beta$
とおく.(対角線AC, BDの交点が原点0), 点Pを z とする.
$\angle PAB=\angle PCB$ は $\arg\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}=\arg\frac{\beta+\alpha}{z+\alpha}$ ----①
$\angle PBC=\angle PDC$ は, 平行四辺形ABCDなので, $\angle ABC=\angle CDA$ だから,
$\angle PBA=\angle PDA$ と同値, $\arg\frac{\alpha-\beta}{z-\beta}=\arg\frac{z+\beta}{\alpha+\beta}$ (正の鋭角) -----②
①ならば②を示す.



$\alpha,\beta,z,0$ は全て異なる.

①より $\arg\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}-\arg\frac{\beta+\alpha}{z+\alpha}=0$, $\arg\frac{(z-\alpha)(z+\alpha)}{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}=0$, $\arg\frac{z^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}=0$,
よって複素数 $\frac{z^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}$ は正の実数 k, $z\neq\pm\beta$ から $k\neq1$
$\frac{z^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}=k$, $\frac{z^2-\beta^2+\beta^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}=k$, $\frac{z^2-\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}+1=k$, $\frac{(z+\beta)(z-\beta)}{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}=k-1$, 両辺に -1 をかけて, $\frac{(z+\beta)(z-\beta)}{(\beta+\alpha)(\alpha-\beta)}=1-k$
$z\neq\pm\beta$, $\alpha\neq\pm\beta$ ので逆数をとれば $\frac{\alpha-\beta}{z-\beta}\times\frac{\alpha+\beta}{z+\beta}=\frac{1}{1-k}$, これは, 実数 ($k\neq1$, $k>0$)
よって $\arg\left(\frac{\alpha-\beta}{z-\beta}\right)\times\left(\frac{\alpha+\beta}{z+\beta}\right)=0$ or $\pm\pi$, $\arg\frac{\alpha-\beta}{z-\beta}-\arg\frac{z+\beta}{\alpha+\beta}=0$ or $\pm\pi$
$\arg\frac{\alpha-\beta}{z-\beta}=\arg\frac{z+\beta}{\alpha+\beta}\pm\pi$ のとき正の鋭角とならない. ∴ $\arg\frac{\alpha-\beta}{z-\beta}=\arg\frac{z+\beta}{\alpha+\beta}$ 示された.

(補) 点Pの軌跡は, どのようなものでしょうか. 例えば, 明らかなことでしょうが, $\alpha=i$, $\beta=-2$ のとき, $z=x+yi$ とおく.
$\frac{(x+yi)^2-i^2}{(-2)^2-i^2}=k$, k は正の実数 $x^2-y^2+1+2xyi=5k$, $2xy=0$ (i) $x=0$ のとき $-y^2+1=5k$, $y^2=1-5k<1$
∴ $-1<y<1$, (ii) $y=0$ のとき $x^2+1=5k$, $x^2=5k-1>-1$ (∵ $k>0$) x は全ての実数 (但し, 四角形ABCD内部)
すなわち, ひし形ABCDのときは, 点Pの軌跡は, 対角線AC or BD (端点を除く) $\alpha=-2+\sqrt{3}i$, $\beta=-4-\sqrt{3}i$
のとき $\alpha^2=1-4\sqrt{3}i$, $\beta^2=13+8\sqrt{3}i$, $\frac{z^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}=\frac{x^2-y^2+2xyi-1+4\sqrt{3}i}{12+12\sqrt{3}i}=\frac{1}{48}\{(x^2-y^2-1)+(2xy+4\sqrt{3})i\}\{1-\sqrt{3}i\}$
$=\frac{1}{48}\{(x^2-y^2-1+\sqrt{3}(2xy+4\sqrt{3}))+(2xy+4\sqrt{3}-\sqrt{3}(x^2-y^2-1))i\}$ は正の実数だから, $2xy+4\sqrt{3}-\sqrt{3}(x^2-y^2-1)=0$
かつ $x^2-y^2-1+\sqrt{3}(2xy+4\sqrt{3})>0$ をみたす, 四角形ABCDの内部を点Pは動く. 数III. 理系微積となります.

(補)(問)前頁 $\alpha=-2+\sqrt{3}i$, $\beta=-4-\sqrt{3}i$ のときの点Pの軌跡(平行四辺形ABCD内部)を実軸をx軸,虚軸をy軸として,(1) P(x,y)とおき,x,yに関する2次の関係式を求め,△ADC内の点Pの軌跡のグラフをかけ.(但し,端点C,Dを含めてよい) (2)線分DCと点Pの軌跡で囲まれる図形の面積Sを求めよ.

(考)幾何的におおよその軌跡の概形がわかっていると,(中学から高校のかけはし,P.1の(4)カのように)解きやすいですが,単に $2xy+4\sqrt{3}-\sqrt{3}(x^2-y^2-1)=0$ ---① だけですと,どうすればいいのか?
①は,xに$-x$,yに$-y$を入れても同じ式になりますから,原点(点O)対称です. $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$ とおいて極方程式にもち込む方法もありそうですが,積分区間が釈然としません.
(2)で線分DCで囲まれる図形とあるから,OC, ODの偏角だろうと予想はつきますが---(解2)とします.
(解1)は,囲まれることを考えて,①を $y=$(xの式)で表すと,積分区間は,$x_1\leqq x\leqq 4$ となりそうです?
①を $x=$(yの式)で表すと,積分区間は,$-\sqrt{3}\leqq y\leqq\sqrt{3}$ らしいから,これでtryします.

(解1) ①は $\sqrt{3}x^2-2yx-\sqrt{3}y^2-5\sqrt{3}=0$ $\quad x=\frac{1}{\sqrt{3}}(y\pm\sqrt{y^2+3y^2+15})=\frac{1}{\sqrt{3}}(y\pm\sqrt{4y^2+15})$

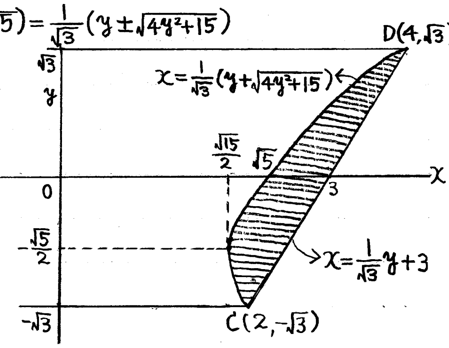
C$(2,-\sqrt{3})$, D$(4,\sqrt{3})$を代入して成立するのは, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}(y+\sqrt{4y^2+15})$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{8y}{2\sqrt{4y^2+15}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{4y^2+15}+4y}{\sqrt{4y^2+15}}$$

$\frac{dx}{dy}=0$ を解く. $\sqrt{4y^2+15}=-4y \Leftrightarrow y<0$ かつ $4y^2+15=16y^2$

$12y^2=15$, $y^2=\frac{5}{4}$, $y<0$ だから $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

このとき $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{4\times\frac{5}{4}+15}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}+2\sqrt{5}\right)=\frac{\sqrt{15}}{2}$



増減表

y	$-\sqrt{3}$	---	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	----	$\sqrt{3}$
$\frac{dx}{dy}$		$-$	0	$+$	
x	2	↘	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	↗	4

グラフは右の通り
xをyの関数として表したので,裏返して,y軸の正方向を右に見れば,わかりやすいです.

(2) $$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y+3\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}(y+\sqrt{4y^2+15})\right\}dy=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4y^2+15}\right)dy=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4y^2+15}+3\right)dy$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}2\sqrt{y^2+\frac{15}{4}}\,dy+2[3y]_0^{\sqrt{3}}=-\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\varphi}\sqrt{\frac{15}{4}(1+\tan^2\theta)}\,\frac{\sqrt{15}}{2}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta+6\sqrt{3}\quad\left(\tan\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=-5\sqrt{3}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta+6\sqrt{3}=-5\sqrt{3}\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\log 5\right)+6\sqrt{3}=\underline{3\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}\log 5}{4}}$$

$y=\frac{\sqrt{15}}{2}\tan\theta$
$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{15}}{2}\tan\varphi$
$\tan\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\because\ I=\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta\overset{※(補)}{=}\int_0^{\varphi}\frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta=\int_0^{\varphi}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\,d\theta=\int_0^{\sin\varphi}\frac{1}{(1-t^2)^2}\,dt=\int_0^{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{(1+t)(1-t)}\right\}^2dt$$

$\frac{dy}{d\theta}=\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$
$\sin\theta=t$ $\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta$
$\cos\theta\,d\theta=dt$

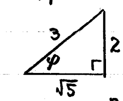
θ	$0\to\varphi$
t	$0\to\sin\varphi$

$$=\int_0^{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\right\}^2dt=\frac{1}{4}\int_0^{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{2}{(1+t)(1-t)}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right\}dt=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}+\log|1+t|-\log|1-t|\right]_0^{\sin\varphi}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1+\sin\varphi}+\frac{1}{1-\sin\varphi}+\log|1+\sin\varphi|-\log|1-\sin\varphi|\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{5}+3+\log\frac{5}{3}-\log\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{12}{5}+\log 5\right)=\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\log 5$$



$\sin\varphi=\frac{2}{3}$
$\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{3}$

※(補)次頁 ①をyについての2次式と見て,判別式$\geqq 0$とすれば $\frac{\sqrt{15}}{2}\leqq x$ が得られます.

※(補) $I=\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta=\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right]_0^{\varphi}-\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\int_0^{\varphi}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$ (部分積分)　$f=\frac{1}{\cos\theta}$　$g'=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta+\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\frac{\frac{2}{3}}{(\frac{\sqrt5}{3})^2}-I+\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos\theta}d\theta$　$f'=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$　$g=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$2I=\frac{6}{5}+\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\frac{6}{5}+\int_0^{\varphi}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{6}{5}+\int_0^{\varphi}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta=\frac{6}{5}+\int_0^{\sin\varphi}\frac{1}{1-t^2}dt$　$t=\sin\theta$　$\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta$

$\cos\theta\, d\theta=dt$

θ	$0\to\varphi$
t	$0\to\sin\varphi$

$=\frac{6}{5}+\frac{1}{2}\int_0^{\sin\varphi}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\frac{6}{5}+\frac{1}{2}\left[\log|1+t|-\log|1-t|\right]_0^{\sin\varphi}$

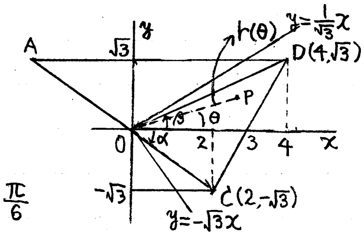
$=\frac{6}{5}+\frac{1}{2}\left(\log|1+\sin\varphi|-\log|1-\sin\varphi|\right)=\frac{6}{5}+\frac{1}{2}\left(\log\frac{5}{3}-\log\frac{1}{3}\right)$　$\sin\varphi=\frac{2}{3},\cos\varphi=\frac{\sqrt5}{3}$

$=\frac{6}{5}+\frac{1}{2}\log5$　∴ $I=\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\log5$

(解2) $\sqrt3x^2-2xy-\sqrt3y^2-5\sqrt3=0$ ---① ※(補)　$x=r(\theta)\cos\theta,\ y=r(\theta)\sin\theta$, とおいて極方程式で考える.

△ADC内部(但し,点C,Dを含めてよい)とあるからθは $\alpha\leqq\theta<\pi+\alpha$, αは $\tan\alpha=-\frac{\sqrt3}{2}$ をみたす負の鋭角.

①は $\sqrt3(r(\theta))^2\cos^2\theta-2(r(\theta))^2\sin\theta\cos\theta-\sqrt3(r(\theta))^2\sin^2\theta-5\sqrt3=0$



$(r(\theta))^2\{\sqrt3(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta\}=5\sqrt3$

$(r(\theta))^2(\sqrt3\cos2\theta-\sin2\theta)=5\sqrt3$ ---②　$(r(\theta))^2(2\cos(2\theta+\frac{\pi}{6}))=5\sqrt3$

$\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})=0$, すなわち $\theta=\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{3}$ のとき $r(\theta)$ は存在しないが,

$\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})\neq0$ のとき $(r(\theta))^2=\frac{5\sqrt3}{2\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})}$　$-\frac{\pi}{3}<\alpha\leqq\theta\leqq$ ODの偏角$(\beta)<\frac{\pi}{6}$

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}-0}(r(\theta))^2=+\infty$, $\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{3}+0}(r(\theta))^2=+\infty$ なので $y=x\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt3}x$, $y=x\tan(-\frac{\pi}{3})=-\sqrt3x$ がこの曲線の漸近線.

$\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})=1$ すなわち $\theta=-\frac{\pi}{12}$ のとき $(r(\theta))^2$ は最小値 $\frac{5\sqrt3}{2}$ をとり, θが $-\frac{\pi}{12}\to\frac{\pi}{6}$ or $-\frac{\pi}{12}\to-\frac{\pi}{3}$ のとき

$(r(\theta))^2$ は徐々に大きく(長く)なる.

原点Oと点Pの軌跡で囲まれる図形の面積 $S'=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(r(\theta))^2d\theta=\frac{5\sqrt3}{4}\int_\alpha^\beta\frac{1}{\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})}d\theta$, $\tan\alpha=-\frac{\sqrt3}{2}$, $\tan\beta=\frac{\sqrt3}{4}$

$S'=\frac{5\sqrt3}{4}\int_\alpha^\beta\frac{\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})}{\cos^2(2\theta+\frac{\pi}{6})}d\theta=\frac{5\sqrt3}{4}\int_\alpha^\beta\frac{\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})}{1-\sin^2(2\theta+\frac{\pi}{6})}d\theta$　$\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})=t$ とおけば

θ	$\alpha\to\beta$
t	$t_1\to t_2$

$t_1=\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6}),\ t_2=\sin(2\beta+\frac{\pi}{6})$, $\frac{dt}{d\theta}=2\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})$　$\cos(2\theta+\frac{\pi}{6})d\theta=\frac{1}{2}dt$

$S'=\frac{5\sqrt3}{4}\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{5\sqrt3}{4}\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{5\sqrt3}{16}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\frac{5\sqrt3}{16}\left[\log|1+t|-\log|1-t|\right]_{t_1}^{t_2}$

$=\frac{5\sqrt3}{16}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_{t_1}^{t_2}=\frac{5\sqrt3}{16}\left(\log\left|\frac{1+t_2}{1-t_2}\right|-\log\left|\frac{1+t_1}{1-t_1}\right|\right)=\frac{5\sqrt3}{16}\log\left|\frac{(1+t_2)}{(1-t_2)}\cdot\frac{(1-t_1)}{(1+t_1)}\right|$

$\tan\alpha=-\frac{\sqrt3}{2}$ のとき $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha=2\tan\alpha\cdot\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{-\sqrt3}{1+\frac{3}{4}}=-\frac{4\sqrt3}{7}$

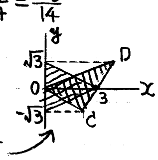
$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{2}{1+\tan^2\alpha}-1=\frac{2}{1+\frac{3}{4}}-1=\frac{8}{7}-1=\frac{1}{7}$

$\tan\beta=\frac{\sqrt3}{4}$ のとき $\sin2\beta=\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{1+\frac{3}{16}}=\frac{8\sqrt3}{19}$, $\cos2\beta=\frac{2}{1+\frac{3}{16}}-1=\frac{32}{19}-1=\frac{13}{19}$

$t_1=\frac{\sqrt3}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{2}\cos2\alpha=\frac{\sqrt3}{2}\cdot(-\frac{4\sqrt3}{7})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=-\frac{12}{14}+\frac{1}{14}=-\frac{11}{14}$　$1+t_1=1-\frac{11}{14}=\frac{3}{14}$, $1-t_1=1+\frac{11}{14}=\frac{25}{14}$

$t_2=\frac{\sqrt3}{2}\sin2\beta+\frac{1}{2}\cos2\beta=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{8\sqrt3}{19}+\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{19}=\frac{24}{38}+\frac{13}{38}=\frac{37}{38}$　$1+t_2=\frac{75}{38}$, $1-t_2=\frac{1}{38}$

$S'=\frac{5\sqrt3}{16}\log\left|\frac{\frac{75}{38}}{\frac{1}{38}}\cdot\frac{\frac{25}{14}}{\frac{3}{14}}\right|=\frac{5\sqrt3}{16}\log25^2=\frac{5\sqrt3}{16}\log5^4=\frac{5\sqrt3}{4}\log5$　求める面積 $S=\triangle OCD-S'$



直線CD: $y=\frac{\sqrt3-(-\sqrt3)}{4-2}(x-4)+\sqrt3=\sqrt3x-3\sqrt3$　$y=0$ のとき $x=3$　∴ $\triangle OCD=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt3=3\sqrt3$

$S=3\sqrt3-\frac{5\sqrt3\log5}{4}$

※(補) 2次曲線の判別式をとれば $(-2)^2-4\times\sqrt3\times(-\sqrt3)=16>0$ であり 双曲線

[考10] vectorによる解　難しいです. 複素数による解をvectorでは、どのようにかけばよいか

$\vec{p}$と$\vec{q}$のなす角θの余弦$\cos\theta=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$となります. ∠ABD＝∠ACD は、複素数では、角をdirectに表すことができて $\arg(\alpha-\beta)-\arg(0-\beta)=\arg(\alpha-\gamma)-\arg(0-\gamma)$ すなわち $\arg\dfrac{\alpha-\beta}{-\beta}=\arg\dfrac{\alpha-\gamma}{-\gamma}$

$\arg\dfrac{\alpha-\beta}{-\beta}-\arg\dfrac{\alpha-\gamma}{-\gamma}$, $\arg\left(\dfrac{\alpha-\beta}{-\beta}\div\dfrac{\alpha-\gamma}{-\gamma}\right)=\arg\dfrac{-\gamma(\alpha-\beta)}{-\beta(\alpha-\gamma)}=0$. $\arg\dfrac{\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\alpha-\gamma)}=0$ $\therefore\dfrac{\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\alpha-\gamma)}$は正の実数

のようなことができました. vectorでは, $\dfrac{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}||-\vec{\beta}|}=\dfrac{(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})\cdot(-\vec{\gamma})}{|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}||-\vec{\gamma}|}$, $\dfrac{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}||\vec{\beta}|}=\dfrac{(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}||\vec{\gamma}|}$ ---① しかありません.

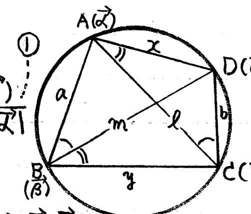
変形してすすめるとすれば $=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}-\vec{\gamma}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}||\vec{\gamma}|}$ しかありません. 結論は $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}||\vec{\gamma}|+|\vec{\beta}-\vec{\gamma}||\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ です.

$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}||\vec{\gamma}|=\dfrac{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}\cdot|\vec{\gamma}|=\dfrac{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}|\vec{\gamma}|=\left\{\dfrac{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}-\dfrac{\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}\right\}|\vec{\gamma}|$ ---② のように変形できます.

結論の右辺は $|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=\dfrac{(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}|\vec{\beta}|=\dfrac{\vec{\gamma}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}|\vec{\beta}|-\dfrac{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}|\vec{\beta}|$ だから、$|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|$, $\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$, $|\vec{\beta}|$が現れるような変形をtryすれば、結論にたどりつけるだろうということになります.

②の $\dfrac{\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}$ に着目し、①から $\dfrac{\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\dfrac{|\vec{\beta}|\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})}{|\vec{\gamma}||\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|}$ を代入することになります.

[解10] A, B, C, D, の位置vectorをそれぞれ$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{0}$とする.



結論は、$ab+xy=lm$ すなわち $|\vec{\gamma}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}||\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|$ ---Ⓣ

円周角の定理より ∠ABD＝∠ACD $\dfrac{(-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|-\vec{\beta}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\dfrac{(-\vec{\gamma})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})}{|-\vec{\gamma}||\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|}$, $\therefore\dfrac{-\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\beta}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\dfrac{\vec{\gamma}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}$

∠CAD＝∠CBD $\dfrac{(-\vec{\alpha})\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|-\vec{\alpha}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}=\dfrac{(-\vec{\beta})\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\beta})}{|-\vec{\beta}||\vec{\gamma}-\vec{\beta}|}$ $\therefore\dfrac{-\vec{\alpha}(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}=\dfrac{\vec{\beta}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\beta}||\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}$ ---②

Ⓣの左辺について

- $|\vec{\gamma}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|\dfrac{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=|\vec{\gamma}|\dfrac{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=|\vec{\gamma}|\left\{\dfrac{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}-\dfrac{\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}\right\}$

  ①より $\dfrac{\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=-\dfrac{|\vec{\beta}|\vec{\gamma}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}$ を代入

  $\underline{|\vec{\gamma}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=|\vec{\gamma}|\left\{\dfrac{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}+\dfrac{|\vec{\beta}|\vec{\gamma}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}\right\}=\underline{\dfrac{|\vec{\gamma}|\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}+\dfrac{|\beta|\vec{\gamma}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}}$ ----③

- $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=|\vec{\alpha}|\dfrac{|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|^2}{|\beta-\gamma|}=|\vec{\alpha}|\dfrac{(\vec{\beta}-\vec{\gamma})\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}=|\vec{\alpha}|\left\{\dfrac{\vec{\beta}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}-\dfrac{\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}\right\}$

  ②より $\dfrac{\vec{\beta}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}=\dfrac{-|\vec{\beta}|\vec{\alpha}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}$ を代入

  $\underline{|\alpha||\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}=|\vec{\alpha}|\left\{-\dfrac{|\vec{\beta}|\vec{\alpha}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}-\dfrac{\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}\right\}=\underline{-\dfrac{|\vec{\beta}|\vec{\alpha}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}-\dfrac{|\alpha|\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}}$ ---④

③+④より, 結論であるⓉの左辺 $|\vec{\gamma}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}||\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=\underbrace{\dfrac{|\vec{\beta}|\vec{\gamma}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}-\dfrac{|\vec{\beta}|\vec{\alpha}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}}_{(ア)}+\underbrace{\dfrac{|\vec{\gamma}|\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}-\dfrac{|\alpha|\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}}_{(イ)}$

波線部(ア)$=|\beta|\left\{\dfrac{\vec{\gamma}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})-\vec{\alpha}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}\right\}=|\vec{\beta}|\dfrac{(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})}{|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|}=|\vec{\beta}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|$

波線部(イ)について　∠BAD＋∠BCD＝π から cos∠BAD＝cos(π−∠BCD)＝−cos∠BCD

よって $\dfrac{-\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\alpha})}{|-\vec{\alpha}||\vec{\beta}-\vec{\alpha}|}=-\dfrac{-\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|-\vec{\gamma}||\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}$, $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\dfrac{\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\gamma}||\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}$ $\therefore\dfrac{|\vec{\gamma}|\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}=\dfrac{|\alpha|\vec{\gamma}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})}{|\vec{\beta}-\vec{\gamma}|}$ ∴(イ)＝0

したがって Ⓣの左辺＝$|\vec{\gamma}||\vec{\alpha}-\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}||\vec{\beta}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|$＝右辺　∴$ab+xy=lm$

[補] $|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|$を残す方向に、計算をすすめると、自然に$|\vec{\beta}||\vec{\gamma}-\vec{\alpha}|$が現れ、残りの余分な部分(イ)が0である事を示せば、OKでした. vectorでの大変さがよくわかる[解10]でした. 角に強いのは、複素数, 三角です.